HET LSA
STUDIUM UND LEHRE
Kompetenz- und Wissensmanagement

Vorschläge zur didaktisch-methodischen Ausgestaltung von mathematischen Brückenkursen

wzw wissenschaftszentrum sachsen-anhalt lutherstadt wittenberg

Das Projekt wird gefördert mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung (BMBF) im Programm „Qualitätspakt Lehre – Einsatz für optimale Studienbedingungen“ (Förderkennzeichen 01PL12067B)

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Reduzierte Altersjahrgänge und gleichzeitig erheblicher Fachkräftebedarf erzwingen es, dass auch solche jungen Menschen an ein Hochschulstudium herangeführt werden, die für ihre individuelle Qualifizierung bisher eher nichtakademische Optionen präferiert hätten. Daraus folgt: Die Heterogenität der Studierenden wird deutlich zunehmen. Unter einer heterogenen Studierendenschaft werden oft nur Studierende verstanden, deren Studierfähigkeit in Frage gestellt wird und deren vorhandene Defizite ausgeglichen werden sollen. Der Terminus ‚heterogen' wird daher häufig mit dem Wunsch verbunden, die heterogene Studierendenschaft zu vereinheitlichen.

Das zentrale Problem, welches mit mathematischen Vor- und Brückenkursen behandelt werden soll, ist der Übergang von der Schule in die Hochschule. Aus fachlicher Sicht haben die Schulabgänger nicht die von den Hochschulen gewünschten Grundlagen des Faches erworben. Es **fehlt an Basiskompetenzen** (Stoff der Sekundarstufe I, wie zum Beispiel Bruchrechnung, Lösen linearer Gleichungssysteme), die über viele Jahre hinweg geübt werden müssen. Die Motive der derzeit angebotenen Brückenkurse umfassen das „Nacharbeiten" dieser Lücken.

Zielsetzung von Brückenkursen

Es zeigt sich allerdings, dass es unrealistisch ist, solche Defizite durch einen maximal 4-wöchigen Kurs auszugleichen. Die Konzeption von Brückenkursen müsste hinsichtlich ihrer Zielsetzung und Motive überdacht werden.

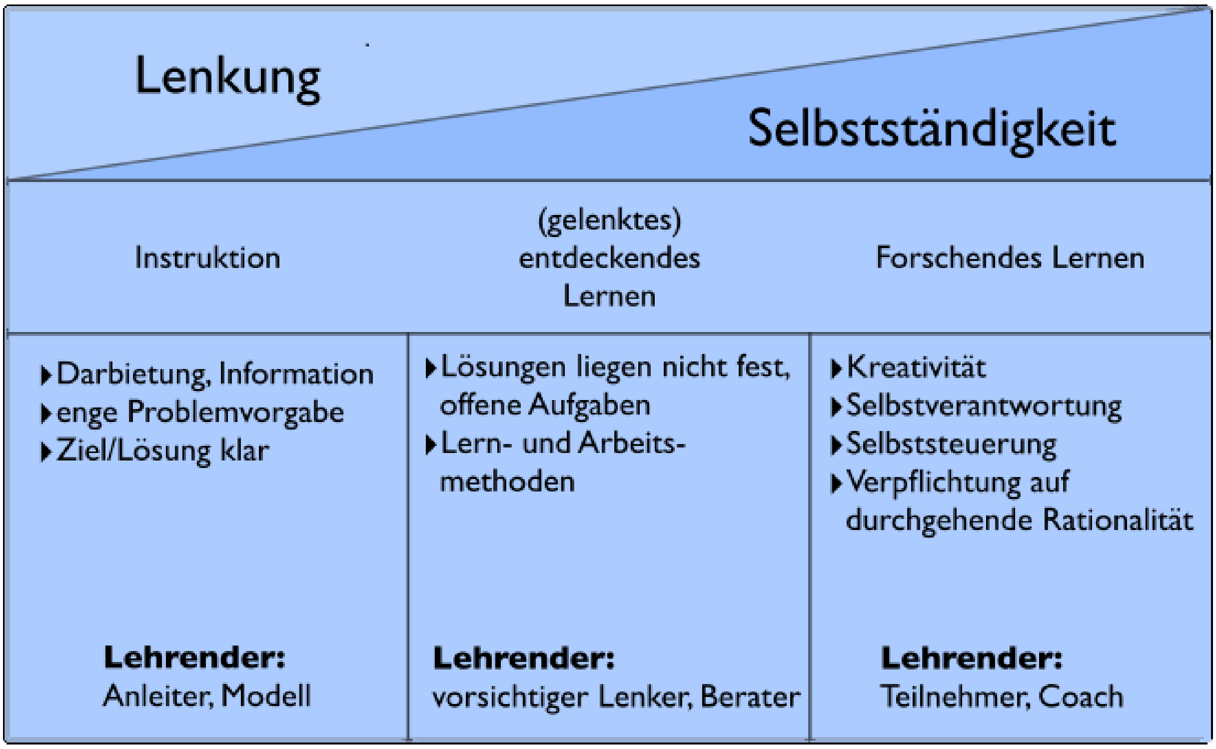
Kompetenzorientierte Brückenkurse können den Übergang dadurch erleichtern, dass sie an Hand von ausgewählten fachlichen Inhalten **mathematische Arbeitsweisen und Methoden der Selbstorganisation** in expliziter Form **vermitteln**. Bei der eigenständigen Beschäftigung mit sinnvoll ausgewählten Aufgaben können diese Arbeitsweisen vertieft und geübt werden.

Ein Brückenkurskonzept kann sich diese Sichtweise zu eigen machen. Es ist nicht möglich, defizitorientiert Stoff nachzuarbeiten. Bisherige Konzepte zeigen, dass eine solche Vorgehensweise die derzeitigen Probleme in der Studieneingangsphase nicht löst. Hierzu führen viele Faktoren: der zu behandelnde Stoffumfang ist zu groß, die Studierenden sind nicht intrinsisch motiviert, kalkülorientiertes Verhalten führt lediglich zu vermeintlichem Erfolg. Die Studierenden werden nicht in die Lage versetzt, sich selbständig weiterzubilden und beschäftigen sich daher nicht im notwendigen Umfang mit Mathematik.

Ansatz für eine neue Sichtweise

Deswegen plädieren wir für ein Konzept, bei dem an ausgewählten, didaktisch reichhaltigen Inhalten exemplarisch vorgegangen wird. Insbesondere muss ein Fokus der Lehre darauf liegen, Studierenden Lern- und Arbeitsmethoden näher zu bringen, mit denen sie sich selbst organisieren können und methodisch effektiv vorgehen. Dadurch werden Studierende in die Lage versetzt, sich auch andere Inhalte selbständig anzueignen. Es wird also ein Schwerpunkt auf die Tiefe des Lernens gelegt und nicht auf die Breite. Dies ist allein deswegen unumgänglich, weil Studierende, die wenigstens in manchen Feldern eine gewisse Tiefe erreicht haben, dadurch auch Denk- und Arbeitsweisen erworben haben, mit denen sie in die Breite gehen können. Umgekehrt ist dies nicht möglich. Durch einen solchen kompetenzorientierten Ansatz ebnet man den Weg von der Lenkung zur Selbständigkeit, bzw. **von der Instruktion zur** eigenständigen **Konstruktion** (s. Abbildung).

Abbildung: Zwischen Lenkung und Selbstständigkeit



(adaptiert nach Gudjons (2003): Frontalunterricht - neu entdeckt, S. 94)

Didaktisch-Methodische Konzeption

Die Gestaltung des Kurses sollte unter Berücksichtigung didaktischer Prinzipien erfolgen. Als wichtigste Prinzipien für die Hochschule sind im Bereich der Mathematik das genetische Prinzip, das exemplarische Prinzip, das Prinzip der Beziehungshaltigkeit und das Prinzip des aktiven Lernens zu nennen.

Das **genetische Prinzip** spiegelt den **Prozesscharakter** der aktiv betriebenen Mathematik wider. Eine genetische Darstellung der Mathematik legt die natürlichen erkenntnistheoretischen Prozesse der Erschaffung und Anwendung von Mathematik offen [Wittmann, 1976]. Sie zeichnet sich durch den Anschluss an das Vorverständnis der Adressaten, die Einbettung der Überlegungen in größere Problemkontexte außerhalb und innerhalb der Mathematik, die Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus, die Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze und die durchgehende Motivation und Kontinuität aus. Mathematik wird hier also nicht als (fertiges) Produkt präsentiert. Der Prozesscharakter kann besonders dabei helfen, die Problemlösefähigkeit zu schulen.

Das **exemplarische Prinzip** (Wagenschein) tritt der bereits angesprochenen Stofffülle entgegen, indem „Plattformen" eingerichtet werden, die es den Lernenden ermöglichen, den gesamten Stoff über die **Verdichtung einzelner Inhalte** beherrschbar zu machen. Die Auswahl geeigneter, „guter" Beispiele ermöglicht eine paradigmatische Herangehensweise. „Gute" Beispiele sind solche, die typische und allgemeine **Denkweisen der Mathematik** erkennbar und erfahrbar machen.

Das **Prinzip der Beziehungshaltigkeit** entspringt allgemeinen lernpsychologischen Erkenntnissen, die zeigen, dass ein Lernen auf Vorrat ohne Verknüpfung und ohne aktuelle Relevanz nicht erfolgreich ist. Inhalte und Methoden werden besser verstanden und behalten, wenn diese mit bereits Gelerntem in Verbindung gebracht werden können. Freudenthal formuliert dies so:

> "Will man zusammenhängende Mathematik unterrichten, so muss man in erster Linie die Zusammenhänge nicht direkt suchen; man muss sie längs der Ansatzpunkte verstehen, wo die Mathematik mit der erlebten Wirklichkeit des Lernenden verknüpft ist. Das - ich meine die Wirklichkeit - ist das Skelett, an das die Mathematik sich festsetzt". [Freudenthal, 1973, S. 77]

Das **Prinzip des aktiven Lernens** betont die Eigentätigkeit der Studierenden. Derzeitige Innovationen hochschuldidaktischer Ansätze haben allesamt die Erhöhung der aktiven Lernzeit als zentrales Ziel gemein. Es ist lerntheoretisch begründet, dass nur aktiv erworbenes und selbst konstruiertes Wissen auch nachhaltig verfügbar ist.

Die Prinzipien in der Lehre

Diese eng miteinander verwobenen Prinzipien führen zu folgenden Grundanforderungen an die didaktische Ausgestaltung von Brückenkursen:

Ein idealer Brückenkurs ist nicht produkt- sondern prozessorientiert. Es kann nicht um die Vermittlung von möglichst viel Stoff gehen, sondern es muss an sorgfältig ausgewählten Beispielen das Allgemeine im Besonderen hervorgehoben und gemeinsam erarbeitet werden. Studierende benötigen genügend Zeit um gemeinsam und selbständig Aufgaben zu bearbeiten. Vorlesungen dienen der Darstellung von typischen Arbeitsweisen, die modellhaft von der Dozentin oder dem Dozenten gezeigt werden. Vorlesungen werden nicht rein rezeptiv gestaltet sondern enthalten immer aktivierende Elemente, wie Fragen, kleine Aufgaben, Rätsel, Rollenspiele, Meinungsumfragen, etc., die die Studierenden einbeziehen.

Lernen auf Vorrat ist für einen Brückenkurs unangebracht, da dies dem Prinzip der Beziehungshaltigkeit widerspricht. Inhalte nur um ihrer selbst willen sind für das Lernen von Mathematik nicht geeignet. Es ist aus lerntheoretischer und neurowissenschaftlicher Sicht sinnlos, etwas zu zeigen, nur „damit man es mal gesehen hat." Insbesondere sollten keine neuen Inhalte, die über den Schulstoff hinausgehen (z.B. komplexe Zahlen oder Induktion) in den Brückenkursen vermittelt werden, sondern die Grundlagen für ein besseres Verständnis dieser Inhalte, wenn diese in den regulären Vorlesungen behandelt werden, gelegt werden. Brückenkurse können keine inhaltliche Lücke schließen, sondern nur an Vorwissen und Erfahrungen der zukünftigen Studierenden anknüpfen und ihnen die notwendigen mathematischen und allgemeinmethodischen Arbeitsweisen vermitteln

Dieser didaktische Ansatz bricht mit der leider noch oft vorherrschenden Kalkülorientierung, die in der Schule erfahren wurde. Die zweifelsohne notwendige Übung von Fertigkeiten kann beispielsweise in Online-Elemente ausgelagert werden. Die wertvolle Präsenzzeit kann für die tiefgehende und sozial erlebte Erarbeitung von exemplarischen Inhalten genutzt werden.

Aufgabenformate

Lernen von Mathematik findet an Aufgaben statt. Daher bedarf es besonderer Sorgfalt bei deren Gestaltung und Auswahl, gerade im Hinblick auf den Weg zur Selbstständigkeit. In der mathematikdidaktischen Forschung wird zwischen Aufgaben für das Lernen und Aufgaben für das Leisten unterschieden [Bruder et al., 2005].

Geschlossene Aufgaben eignen sich für Tests und das Üben und Festigen von Fertigkeiten. Diese können problemlos in Online-Angebote ausgelagert werden. Geschlossene Aufgaben bestehen aus einem klar formulierten Arbeitsauftrag, der auf einem festen Weg zu einem vorher bestimmten Ergebnis führt. Mathematisches Arbeiten kann besser an offenen oder leicht geöffneten Aufgaben gelernt werden. Eine Aufgabe kann dadurch geöffnet werden, dass der Arbeitsauftrag Wahlmöglichkeiten lässt; es mehrere Lösungswege gibt, die frei gewählt werden können; oder es keine feste Lösung der Aufgabe gibt, sondern mehrere Antworten richtig sein können, wenn sie denn begründet werden.

Insbesondere bieten offene Aufgaben Diskussionsanlässe, erlauben Fehler als Chancen, unterstützen Neugier und Entdecken und sind prozessorientiert. Sie lassen sich im Gegensatz zu geschlossenen Aufgaben schwierig bewerten, was aber den Zielen eines Brückenkurses nicht widersprechen sollte.

Es gibt verschiedene Techniken zur Öffnung von Aufgaben. Die geschlossene Aufgabe „*Zeichne die Gerade mit der Gleichung y = 2x+2 in ein Koordinatensystem!*" kann beispielsweise durch die Umkehrung „*Zeichne eine Gerade auf ein leeres Blatt Papier. Zeichne dann ein Koordinatensystem so ein, dass die Gerade die Gleichung y = 2x+2 hat!*" geöffnet werden. (Nach einer Idee von Wilfried Herget, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg)

Eine weitere Möglichkeit ist die Aufforderung an die Lernenden, selbst Vermutungen zu äußern und diese dann zu begründen. So kann zum Beispiel nach den möglichen Bedeutungen des Terms $\frac{x+y+|x-y|}{2}$ gefragt werden, anstatt dass gefordert wird, zu beweisen, dass dieser Term das Maximum von x und y als Wert hat:

Aufgabe 2.5: (3 Punkte)

Nennen Sie Ihre Vermutungen über die Bedeutung des Terms $\frac{x+y+|x-y|}{2}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$, und beweisen Sie diese. Zeigen Sie mit ein paar Worten auf, wie Sie zu Ihrer Vermutungen kamen?

Die Beziehungshaltigkeit von mathematischen Sachverhalten sollte auch in Aufgaben praktiziert werden. So sollte der Beweis der Ungleichungen vom arithmetischen und geometrischen Mittel immer im Kontext geometrischer Interpretation durchgeführt werden:

Aufgabe 2.3: (4 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe der Körper- und Anordnungsaxiome in $\mathbb{R}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 \leq a \leq b \Longrightarrow a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b$$

b) Begründen Sie mit Hilfe dieser Ungleichung, dass von allen Rechtecken mit festgelegtem Umfang U das Quadrat den maximalen Flächeninhalt hat.

Der Grad der Öffnung unterstützt Studierende auch innerhalb eines Themenkomplexes beim Erlernen mathematischer Denkweisen. So kann zum Beispiel der Übergang von speziellen Beispielen hin zu allgemeinen Verfahren innerhalb einer Aufgabe durch eine fortschreitende Öffnung begleitet werden:

Aufgabe 2.4: (4 Punkte)

a) Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung $|x+2| \leq |x-1|$ erfüllen.

b) Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung $|2 - |x+1|| \leq 1$ erfüllen.

c) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Lösung von Ungleichungen der Form $|ax+b| < c$ für a, b, c und $x \in \mathbb{R}$.

Weiterführende Literatur

Bruder, R./A. Büchter/ T. Leuders (2005). Die "gute" Mathematikaufgabe – ein Thema für die Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern. In Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim.

Freudenthal, H. (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe, Stuttgart.

Gudjons, H. (2003). Frontalunterricht – neu entdeckt, Bad Heilbrunn.

Weigand, H.-G. (2003). Didaktische Prinzipien. Unter http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040500/dokumente/Texte_zu_Grundfragen/ weigand_didaktische_ prinzipien.pdf (05.11.13)

Wittmann, E. C. (1976). Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig.

IMPRESSUM
Autor/inn/en: Andrea Hoffkamp, Ulrich Kortenkamp, Susen Seidel
Transferstelle „Qualität der Lehre“
WZW Wissenschaftszentrum Sachsen-Anhalt Lutherstadt Wittenberg e. V. • Schloßstraße 10 • 06886 Lutherstadt Wittenberg.
Die Transferstelle „Qualität der Lehre“ ist Teil des Verbundprojekts „Heterogenität als Qualitätsherausforderung für Studium und Lehre – Kompetenz- und Wissensmanagement für Hochschulbildung im demografischen Wandel“ (**HET LSA**).
Mehr Informationen unter: www.het-lsa.de.

November 2013